

Решение

Решение 7 класс

1. Ответ. Существует.

Подойдет, например, число 1234. Действительно, $1234 + 4321 = 5555 = 101 \cdot 55$.

2. Ответ. 8.

Заметим, что все 9 карточек положить в ряд требуемым образом не получится. Это следует из того, что у каждой из карточек с числами 5 и 7 может быть только один сосед – карточка с числом 1. Значит, обе карточки 5 и 7 должны лежать с краев, а карточка с единицей должна соседствовать с каждой из них, что невозможно. Выбрать 8 карточек и разложить их в ряд согласно требованиям задачи можно, например, так: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1, 5.

3. Ответ. 5 кексов.

Суммарная стоимость покупки Пети и Ани равна стоимости двух покупок Коли. Если

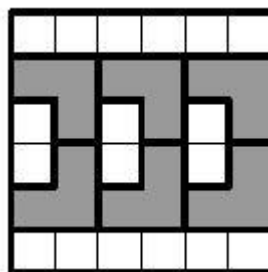
обозначить x , y и z соответственно стоимости пирожного, кекса и бублика, то получаем равенство: $(x + 2y + 3z) + (3x + z) = 12y$, откуда следует, что $4x + 4z = 10y$, то есть $2x + 2z = 5y$.

4. Ответ. Не мог

.Заметим, что фраза «Я сижу рядом со лжецом» могла быть произнесена только в том случае, когда за одной партой сидят лжец и рыцарь. Это означает, что в классе лжецов и рыцарей поровну – по 13. Фраза же «Я сижу рядом с рыцарем» могла быть произнесена только в том случае, когда за одной партой сидят либо два лжеца, либо два рыцаря. Но 13 – нечетное число, поэтому рассадить 13 лжецов и 13 рыцарей за парты так, чтобы за каждой партой сидели либо два лжеца, либо два рыцаря, не получится.

5. Ответ. 6.

Пусть клетки квадрата 6×6 покрашены так, что больше ни одного уголка покрасить нельзя. Тогда в каждом квадратице 2×2 покрашено хотя бы 2 клетки, иначе в этом квадратице можно покрасить уголок. Разбивая квадрат 6×6 на 9 квадратишков 2×2 , получаем, что всего покрашено не меньше $9 \cdot 2 = 18$ клеток. Итак, покрашено не меньше 6 уголков. На рисунке показано, как покрасить 6 уголков, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя.

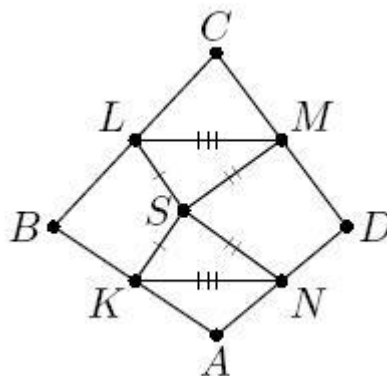


Решение 8 класс

1. Подойдут, например, числа 1, 2, 3 и 5. Действительно, значения всех трех выражений $1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 17$, $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 13$ и $1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 11$ являются простыми числами.

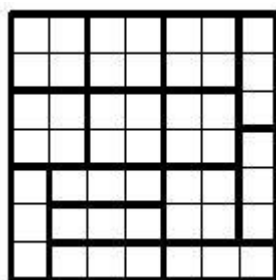
2. Заметим, что отрезок KN является средней линией треугольника BAD . Значит, $KN = \frac{BD}{2}$. Аналогично, из треугольника BCD получаем $LM = \frac{BD}{2}$. Но тогда треугольники

KSN и MSL равны по трем сторонам (см. рис.). Отсюда следует требуемое равенство соответствующих углов.



3. **Ответ.** При n , делящихся на 7.

Пусть рабочие использовали по x плиток каждого вида. Тогда площадь, занятая плитками, равна $4x + 3x = 7x = n^2$. Значит, n должно делиться на 7. Если же n делится на 7, то пол уложить можно. Достаточно заметить, что квадрат 7×7 можно уложить, используя по 7 плиток каждого вида (см. рис.). А квадрат $7k \times 7k$ можно разрезать на квадраты 7×7 .



4. Первое решение. Так как $abc < 0$, то либо одно из чисел a, b, c отрицательно, либо все три. Но $a + b + c = 0$, поэтому все три числа отрицательными быть не могут. Пусть, без ограничения общности, $a > 0, b > 0$ и $c < 0$. Нам нужно доказать, что

$$\frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} > 0. \quad \text{Или} \quad \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} > -\frac{a^2 + b^2}{c} = \frac{a^2 + b^2}{a+b}. \quad \text{Так как } a > 0 \text{ и}$$

$$\frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2} > \frac{b^2}{b^2} > \frac{b^2}{a+b}.$$

$b > 0$, то $\frac{b^2 + c^2}{a} > \frac{b^2}{a} > \frac{b^2}{a+b}$. Аналогично, $\frac{c^2 + a^2}{b} > \frac{c^2}{b} > \frac{c^2}{a+b}$. Сложив два полученных

неравенства, получим требуемое.

.

Второе решение. Перепишем числитель первой дроби в виде $(a + b)^2 - 2ab = (-c)^2 - 2ab = c^2 - 2ab$. Тогда первую дробь можно преобразовать к виду

$$c - \frac{2ab}{c}, \text{ а сумму дробей - к виду}$$

$$\left(\frac{c^2 - 2ab}{c} \right) + \left(\frac{b^2 - 2bc}{a} \right) + \left(\frac{c^2 - 2ca}{b} \right) = \left(\frac{ab}{c} - \frac{bc}{ab} - \frac{ca}{ab} \right) = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc}.$$

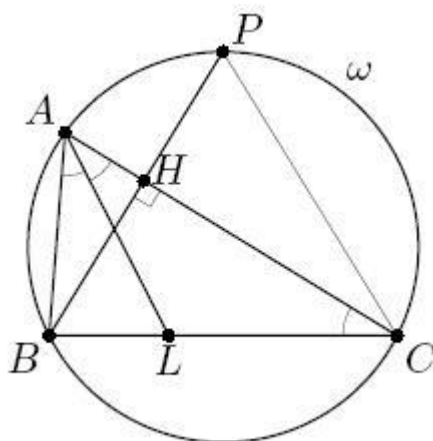
Выражение в скобках положительно, а произведение abc , по условию, отрицательно, откуда и следует утверждение задачи.

Замечание. Можно заметить, что, если c отрицательно, а a и b положительны, то

$$|c| = a + b > a. \text{ Поэтому } \frac{b^2 + c^2}{a} > -\frac{b^2 + a^2}{c}; \text{ кроме того, } \frac{c^2 + a^2}{b} > 0.$$

5. Ответ. Не могут.

Покажем, как играть Пете, чтобы он смог забрать со стола последнюю монету независимо от игры Васи и Толи. Пусть первым ходом Петя возьмет 4 монеты. Заметим, что Вася и Толя за свои ходы суммарно могут взять от 2 до 4 монет. Это значит, что после первого хода Толи на столе останется от 292 до 294 монет. После этого Пете нужно взять 2, 3 или 4 монеты так, чтобы на столе осталось 290 монет. А теперь, если Вася и Толя будут брать суммарно 2, 3 или 4 монеты, Пете нужно брать соответственно 3, 2 или 1 монету, чтобы после каждого его хода число монет, остающихся на столе, делилось на 5. Таким образом, он оставит 285, 280, ..., 5 и, наконец, 0 монет, то есть заберет со стола последнюю монету.



4. Ответ. Не существует.

Предположим, что требуемое число существует. Тогда у него все цифры различны, поскольку все остатки при делении на них различны. Значит, число состоит из цифр от 1 до 9, каждая использована по одному разу. Поэтому сумма его цифр равна 45. Но тогда оно делится и на 3, и на 9 (а также на 1), то есть имеет одинаковые (нулевые) остатки при делении на эти цифры. Противоречие.

5. Ответ. Выигрывает второй.

Заметим сначала, что в каждой строке и каждом столбце, кроме средних, по 11 клеток; поскольку число 11 нечётно, в каждом из этих рядов крестиков и ноликов не может быть поровну. Приведем выигрышную стратегию для второго игрока. Каждым своим ходом ему следует ставить нолик в клетку, симметричную клетке, в которую только что поставил крестик первый игрок, относительно центра доски (понятно, что он всегда сможет так сделать). Покажем, что при такой стратегии количество строк, в которых больше крестиков, будет равно количеству столбцов, в которых больше ноликов. Заметим, что все клетки таблицы (кроме центральной) разобьются на пары симметричных относительно центра, причём в каждой такой паре клеток будут стоять ровно один нолик и один крестик. Рассмотрим сначала среднюю строку таблицы. Центральная клетка (центр таблицы) вырезана. Остальные 10 клеток разбиваются на 5 пар симметричных. Это означает, что в них стоят 5 крестиков и 5 ноликов. Эта строка не даёт преимущества первому игроку. Аналогично, средний столбец не даёт преимущества второму игроку. Рассмотрим теперь первую и последнюю строки таблицы. Их клетки образуют 11 пар симметричных клеток. Это означает, что в них суммарно стоит 11 крестиков и 11 ноликов. Значит, если в одной из этих строк больше крестиков, то в другой больше ноликов. Аналогичное утверждение можно доказать про остальные пары симметричных строк таблицы, а также про все пары симметричных столбцов. Итак, количество строк, в которых больше крестиков, будет равно 5, и количество столбцов, в которых больше ноликов, будет также равно 5. Поэтому $A = B = 5$ и второй выигрывает.

Решение 10 класс

1. Ответ. 1007,5 .

Первое решение. Раскрыв скобки, получим $ab - (a + b)x = cd - (c + d)x$. Подставив

$d = 2015 - a$ и $b = 2015 - c$, получаем

$a(2015 - c) - (a + 2015 - c)x = c(2015 - a) - (c + 2015 - a)x$. Сократив и
приведя подобные,

получим $(a - c)2015 = 2(a - c)x$. Учитывая, что $a \neq c$, получаем $2x = 2015$, то есть

$x = 1007,5$.

Второе решение. Поскольку $c = 2015 - b$ и $d = 2015 - a$, параболы $y = (x - a)(x - b)$ и $y = (x - c)(x - d)$ симметричны относительно прямой $x = 2015/2$. Значит, они пересекаются в

точке, лежащей на этой прямой. Если бы эти параболы имели еще одну общую точку, то симметричная ей точка также лежала бы на обеих параболах, то есть наше уравнение имело бы как минимум три различных корня. Но тогда бы эти параболы совпадали. А это противоречит условию, так как в этом случае $a = d = 2015/2$ и $b = c = 2015/2 = a$.

2. Запишем равенство $a_2^2 = a_1 a_3$. Имеем: $(1 + x^3 + x^4)^2 = (1 + x^2 + x^3)(1 + x^4 + x^5)$.

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим $x^4 + x^3 = x^5 + x^2$. Преобразуем:

$0 = x^5 + x^2 - x^4 - x^3 = x^2(x^3 + 1 - x^2 - x) = x^2(x - 1)^2(x + 1)$. Откуда либо $x = 0$,
либо $x = -1$,

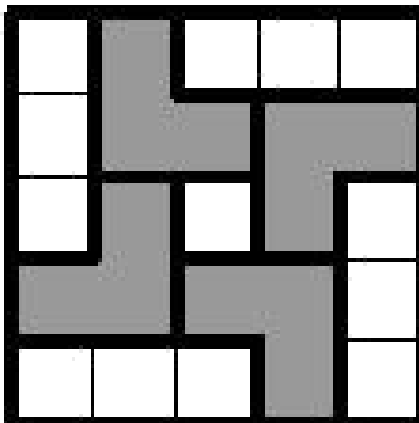
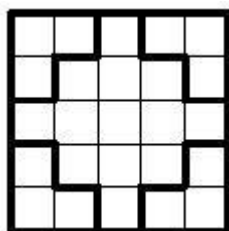
либо $x = 1$. В первых двух случаях $a_n = 1$ для всех n , в третьем случае $a_n = 3$ для всех n . Во

всех этих случаях выполняется требуемое равенство $a_n^2 = a_{n-1} a_{n+1}$.

Замечание. После получения равенства $x^4 + x^3 = x^5 + x^2$ можно действовать и по-другому. Раскрывая скобки в равенстве $a^2 = a$ и приводя подобные слагаемые, получаем, что оно равносильно равенству $x^{n+2} + x^{n+1} = x^{n+3} + x^n$, которое получается из $x^4 + x^3 = x^5 + x^2$ домножением на x^{n-2} .

3. Ответ. 4.

Пусть клетки квадрата 5×5 покрашены так, что больше ни одного уголка покрасить нельзя. Рассмотрим 4 уголка, отмеченных на рисунке. Так как ни один из этих уголков покрасить нельзя, то в каждом из них покрашено по крайней мере по одной клетке. Заметим, что одним уголком нельзя покрасить клетки двух отмеченных уголков. Значит, всего покрашено не меньше 4 уголков.



На следующем рисунке показано, как покрасить 4 уголка так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя.

4. Ответ. 5.

Заметим, что нечетное полупростое число может быть лишь суммой двойки и нечетного простого числа.

Покажем, что три подряд идущих нечётных числа $2n + 1$, $2n + 3$ и $2n + 5$, больших 25, не могут быть полупростыми одновременно. Предполагая противное, получаем, что числа $2n - 1$, $2n + 1$ и $2n + 3$ – простые, и все они больше 3. Но одно из этих трёх чисел делится на 3. Противоречие. Заметим, что среди любых шести последовательных чисел есть три подряд идущих нечетных числа; значит, последовательных полупростых чисел не может быть больше пяти. Пять подряд идущих чисел могут быть полупростыми; например, $30 = 17 + 13$, $31 = 29 + 2$, $32 = 19 + 13$, $33 = 31 + 2$, $34 = 23 + 11$. **Замечание.** Существуют и другие примеры.

Отрезок C_1M является медианой прямоугольного треугольника CC_1A , поэтому

$$C_1M = \frac{AC}{2} = MA \quad (\text{см. рис.}). \quad \text{Тогда} \quad \angle C_1MA = \pi - 2\angle BAC. \quad \text{Аналогично,} \quad \angle AMC_1 = \pi - 2\angle BCA.$$

Отсюда $\angle C_1MA + \angle AMC_1 = 2(\pi - \angle BAC - \angle BCA) = 2\angle ABC$, а тогда

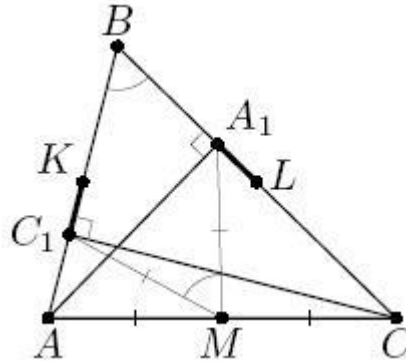
$$\angle A_1MC_1 = \pi - (\angle AMC_1 + \angle CMA_1) = \pi - 2\angle ABC.$$

5. Отрезок C_1M является медианой прямоугольного треугольника CC_1A , поэтому

$$C_1M = \frac{AC}{2} = MA \quad (\text{см. рис.}). \quad \text{Тогда} \quad \angle C_1MA = \pi - 2\angle BAC. \quad \text{Аналогично,} \quad \angle AMC_1 = \pi - 2\angle BCA.$$

Отсюда $\angle C_1MA + \angle AMC_1 = 2(\pi - \angle BAC - \angle BCA) = 2\angle ABC$, а тогда

$$\angle A_1MC_1 = \pi - (\angle AMC_1 + \angle CMA_1) = \pi - 2\angle ABC.$$



Из условия следует, что $\angle ABC = \pi - 2\angle ABC$. Отсюда $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$. По условию,

треугольник ABC – не равнобедренный; пусть, например, $AB < BC$. Тогда из прямоугольного треугольника ABA1 получаем $BA_1 = BA \cos(\pi/3) = AB/2$. Значит,

$$AL = BL - BA_1 = \frac{BC - AB}{2}. \text{ Аналогично, } KC = BC - BK = \frac{BC - AB}{2} = AL. \text{ Утверждение}$$

доказано.

Решение 11 класс

1. Ответ. Не существует.

Предположим, что такое число существует. Так как остатки при делении на 8 цифр – различные числа от 1 до 8, то цифры у восьмизначного числа различные. Далее, если число дает остаток 8 при делении на цифру, то эта цифра – 9. Значит, последняя цифра числа равна 9. Аналогично, если число дает остаток 7 при делении на цифру, эта цифра – 8 или 9. Но 9 уже стоит на последнем месте; поэтому предпоследняя цифра – 8. Рассуждая аналогично, получим, что наше число может быть равно только 23456789. Однако это число, например, при делении на третью цифру (4) дает остаток 1, а не 3. **Замечание.** Также число 23456789 даёт остаток 5 (а не 7) при делении на 8.

2. Подставив данный корень $x = a + b$ в уравнение, получаем равенство

$$(a + b + a)(a + b + b) = (2a + b)(2b + a) = 9. \quad \text{Тогда} \quad 9 = 5ab + 2(a^2 + b^2) \geq 5ab + 2 \cdot 2ab = 9ab,$$

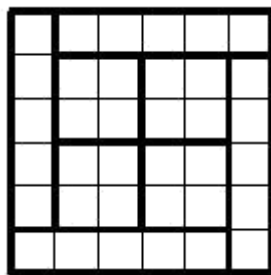
откуда $ab \leq 1$. (Мы использовали неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$, которое эквивалентно

$$(a - b)^2 \geq 0.)$$

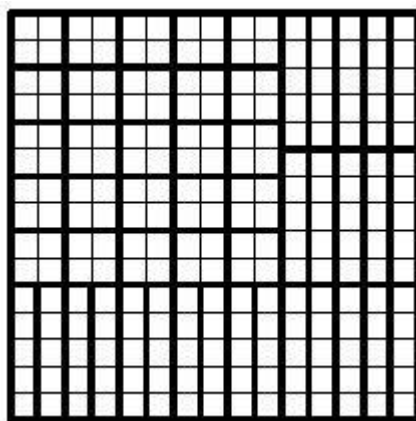
3. Ответ. 12, 15, 18.

Пусть рабочие использовали по x плиток каждого вида. Тогда площадь, занятая плитками, равна $4x + 5x = 9x = n^2$. Значит, n^2 должно делиться на 9, то есть n должно делиться на 3. Таким образом, могут подойти лишь значения $n = 12$, $n = 15$ и $n = 18$.

Покажем, как уложить требуемые квадраты. Квадрат 6×6 можно уложить, используя поровну плиток обоих типов (см. рис.). Так как квадраты 12×12 и 18×18 разрезаются на 6×6 , то их также можно уложить требуемым образом.



На следующем рисунке показано, как уложить квадрат 15×15 , используя по 25 плиток каждого типа.



Замечание. Квадрат 18×18 можно разбить на прямоугольники 2×9 , каждый из которых можно уложить, используя по 2 плитки каждого типа.

4. Первое решение. Пусть M – середина ребра SA . Так как $MA = MS = MC$, то в

треугольнике ASC медиана MC в два раза больше стороны AS , к которой она проведена. Значит, треугольник ASC – прямоугольный с гипотенузой AS (см. рис.). Аналогично, треугольник ASB – прямоугольный с гипотенузой AS . Поэтому $AS^2 = BA^2 + SB^2 = CA^2 + SC^2$. Но $SC^2 = CH^2 + SH^2$ и $SB^2 = BH^2 + SH^2$. Подставив в предыдущее равенство, получим $BA^2 + BH^2 + SH^2 = CA^2 + CH^2 + SH^2$. Вычтя из обеих частей равенства SH^2 , получим требуемое.

Второе решение. Пусть M – середина ребра SA , а точка O – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость ABC . Тогда MO – средняя линия треугольника SAH , поэтому точка O – середина отрезка AH . Из равенства прямоугольных треугольников AMO , BMO и CMO с общим катетом OM и равными, по условию, гипотенузами AM , BM и CM , получаем, что $OA = OB = OC$. Значит, точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC , а тогда AH – диаметр этой окружности. Значит, углы ABH и ACH – прямые. Применив теорему Пифагора к треугольникам ABH и ACH , получаем утверждение задачи.

Замечание. Другое доказательство того, что $\angle ABS = \angle ACS = 90^\circ$, основано на том, что точка M является центром сферы, описанной около пирамиды, а тогда отрезок SA – диаметр этой сферы.



5. Ответ. Существуют.

Пусть, например, $a = 10000^2 + 10000$, $b = 1001$. Предположим, что существует $c = d^2$

такое, что числа a , b и c являются длинами сторон некоторого треугольника. Тогда должны выполняться неравенства треугольника $a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$.

Рассмотрим первые два

из них: $a + b > c$ и $c > a - b$. Заметим, что

$$a + b = 10000^2 + 10000 + 1001 < 10000^2 + 10000 + 10000 + 1 = 10001^2, \quad \text{и}$$

$$a - b = 10000^2 + 10000 - 1001 > 10000^2. \quad \text{Но тогда } 10001^2 > a + b > c > a - b > 10000^2, \quad \text{то есть } 10001^2 > d^2 > 10000^2. \quad \text{Это невозможно.}$$

Замечание. Существуют и другие примеры.

Рекомендации по оцениванию

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого в методических рекомендациях по проведению Олимпиады следует проинформировать жюри муниципального этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.